CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM PODSTAWOWY

DATA: **5 maja 2021 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **170 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **45**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

EMAP-P0-**100**-2105

W każdym z zadań od 1. do 28. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $100^5 \cdot (0{,}1)^{-6}$ jest równa

A. 10^{13} **B.** 10^{16} **C.** 10^{-1} **D.** 10^{-30}

Zadanie 2. (0–1)

Liczba 78 stanowi 150% liczby c. Wtedy liczba c jest równa

A. 60 **B.** 52 **C.** 48 **D.** 39

Zadanie 3. (0–1)

Rozważamy przedziały liczbowe $(-\infty, 5)$ i $\langle -1, +\infty)$. Ile jest wszystkich liczb całkowitych, które należą jednocześnie do obu rozważanych przedziałów?

A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 7

Zadanie 4. (0–1)

Suma $2\log\sqrt{10} + \log 10^3$ jest równa

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Zadanie 5. (0–1)

Różnica $0{,}(3) - \frac{23}{33}$ jest równa

A. $-0{,}(39)$ **B.** $-\frac{39}{100}$ **C.** $-0{,}36$ **D.** $-\frac{4}{11}$

1. B

Uzasadnienie: $(10^2)^5 \cdot (10^{-1})^{-6} = 10^{10} \cdot 10^6 = 10^{16}$

2. B

Uzasadnienie: $1{,}5c = 78$ $(\mathit{dzielimy\ obustronnie\ przez}\ 1{,}5)$ $c = 52$

3. A

Uzasadnienie: Są to liczby: -1,0,1,2,3,4.

4. C

Uzasadnienie: $\log\sqrt{10^2} + 3\log 10 = \log 10 + 3\log 10 = 4\log 10 = 4 \cdot 1 = 4$

5. D

Uzasadnienie: $\frac{1}{3} - \frac{23}{33} = \frac{11}{33} - \frac{23}{33} = -\frac{12}{33} = -\frac{4}{11}$

Zadanie 6. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2-x}{2} - 2x \geq 1$ jest przedział

A. $\langle 0, +\infty)$ **B.** $(-\infty, 0\rangle$ **C.** $(-\infty, 5\rangle$ **D.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right\rangle$

6. B

Uzasadnienie: *Mnożymy nierówność obustronnie przez* 2, *otrzymujemy*:

$$2 - x - 4x \geq 2$$

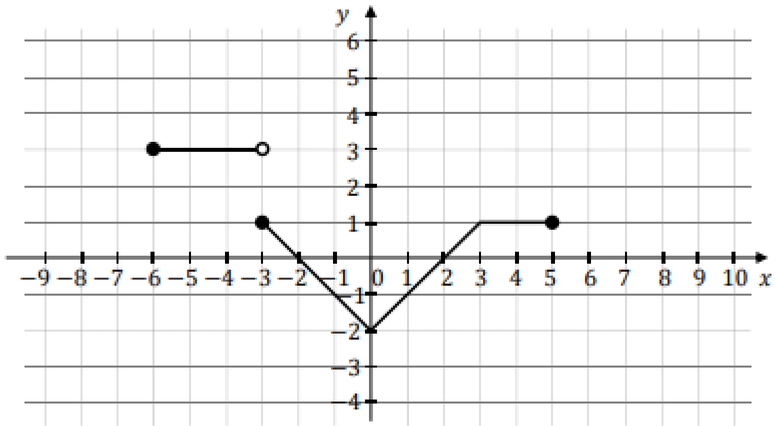
$$-5x \geq 0$$

Dzielimy obustronnie przez -5, *odwracając znak nierówności, otrzymujemy*:

$$x \leq 0$$

Zadanie 7. (0–1)

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w zbiorze $\langle -6, 5\rangle$.



Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x) - 2$ dla $x \in \langle -6, 5\rangle$. Wskaż zdanie prawdziwe.

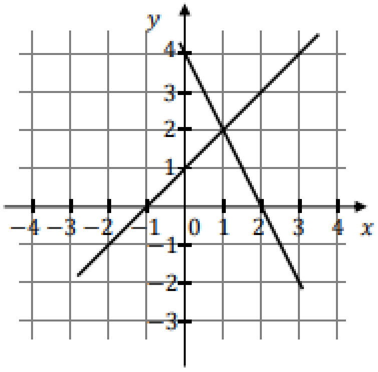
A. Liczba $f(2) + g(2)$ jest równa (-2).
B. Zbiory wartości funkcji f i g są równe.
C. Funkcje f i g mają te same miejsca zerowe.
D. Punkt $P = (0, -2)$ należy do wykresów funkcji f i g.

7. A

Uzasadnienie: $f(2) = 0 \quad g(2) = -2$ *zatem* $f(2) + g(2) = -2$

Zadanie 8. (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono geometryczną interpretację jednego z niżej zapisanych układów równań. Wskaż ten układ, którego geometryczną interpretację przedstawiono na rysunku.



A. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

8. A

Uzasadnienie: Jedna z funkcji przecina oś OY w punkcie (0,1), druga zaś w (0,4) co wskazuje na wartości współczynnika b we wzorach funkcji liniowych (b=1 w pierwszej funkcji i b=4 w drugiej). Dodatkowo jedna z funkcji jest rosnąca, druga malejąca, co wskazuje na dodatni współczynnik a w pierwszej funkcji i ujemny w drugiej.

Zadanie 9. (0–1)

Proste o równaniach $y = 3x - 5$ oraz $y = \frac{m-3}{2}x + \frac{9}{2}$ są równoległe, gdy

A. $m = 1$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 6$ **D.** $m = 9$

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. Wtedy dla argumentu $x = \sqrt{3} - 1$ wartość funkcji f jest równa

A. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

Zadanie 11. (0–1)

Do wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = 3^x - 2$ należy punkt o współrzędnych

A. $(-1, -5)$ **B.** $(0, -2)$ **C.** $(0, -1)$ **D.** $(2, 4)$

Zadanie 12. (0–1)

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -2(x+1)(x-3)$ jest malejąca w przedziale

A. $\langle 1, +\infty)$ **B.** $(-\infty, 1\rangle$ **C.** $(-\infty, -8\rangle$ **D.** $\langle -8, +\infty)$

9. D

Uzasadnienie:
$Funkcje\ liniowe\ są\ równoległe, gdy\ ich\ współczynniki\ kierunkowe\ są\ sobie\ równe\ zatem$

$$3 = \frac{m-3}{2} \qquad 6 = m - 3 \qquad m = 9$$

10. B

Uzasadnienie: $f(\sqrt{3}-1) = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2(\sqrt{3}-1)-2} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-4} = -1$

11. C

Uzasadnienie: $f(0) = 3^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

12. A

Uzasadnienie: Wykresem funkcji f(x) jest parabola z ramionami do dołu, której współrzędna p wierzchołka wynosi 1, zatem funkcja jest malejąca od 1 do ∞.

Zadanie 13. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg $\left(15,\ 3x,\ \frac{5}{3}\right)$ jest geometryczny i wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Stąd wynika, że

A. $x = \frac{3}{5}$ **B.** $x = \frac{4}{5}$ **C.** $x = 1$ **D.** $x = \frac{5}{3}$

Zadanie 14. (0–1)

Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = 3n^2 - 25n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Liczba niedodatnich wyrazów ciągu (b_n) jest równa

A. 14 **B.** 13 **C.** 9 **D.** 8

13. D

Uzasadnienie: $(3x)^2 = 15 \cdot \frac{5}{3}$ $\qquad 9x^2 = 25 \qquad x^2 = \frac{25}{9} \qquad x = \frac{5}{3}$

Nie bierzemy pod uwagę ujemnej odpowiedzi, ponieważ wszystkie wyrazu ciągu są dodatnie.

14. D

Uzasadnienie: Pierwsze osiem wyrazów ciągu b_n są niedodatnie.

Zadanie 15. (0–1)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci i piąty wyraz ciągu spełniają warunek $a_3 + a_5 = 58$. Wtedy czwarty wyraz tego ciągu jest równy

A. 28 **B.** 29 **C.** 33 **D.** 40

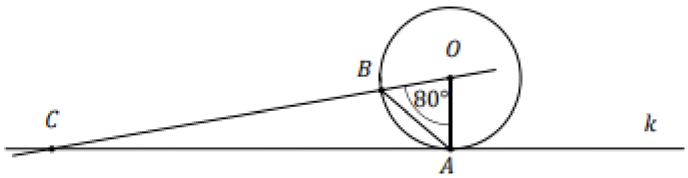
Zadanie 16. (0–1)

Dla każdego kąta ostrego α iloczyn $\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha} \cdot \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ jest równy

A. $\sin\alpha$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha$ **C.** $\cos\alpha$ **D.** $\sin^2\alpha$

Zadanie 17. (0–1)

Prosta k jest styczna w punkcie A do okręgu o środku O. Punkt B leży na tym okręgu i miara kąta AOB jest równa $80°$. Przez punkty O i B poprowadzono prostą, która przecina prostą k w punkcie C (zobacz rysunek).



Miara kąta BAC jest równa

A. $10°$ **B.** $30°$ **C.** $40°$ **D.** $50°$

15. B

Uzasadnienie: a_4 *jest średnią arytmetyczną* a_3 *i* a_5 *więc* $a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$

$a_4 = \frac{58}{2}$ $\quad a_4 = 29$

16. B

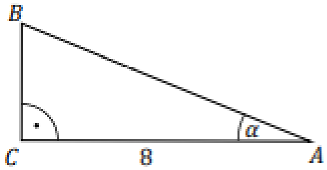
Uzasadnienie: $\frac{\cos\alpha}{(\cos\alpha)^2} \cdot \frac{(\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

17. C

Uzasadnienie: Kąt OAC jest kątem prostym. Kąt OAB ma miarę 50 stopni (Trójkąt BOA jest równoramienny). Zatem szukany kąt BAC ma miarę 40 stopni (od kąta prostego odejmujemy kąt OAB).

Zadanie 18. (0–1)

Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 8 oraz $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{5}$ (zobacz rysunek).



Pole tego trójkąta jest równe

A. 12 **B.** $\frac{37}{3}$ **C.** $\frac{62}{5}$ **D.** $\frac{64}{5}$

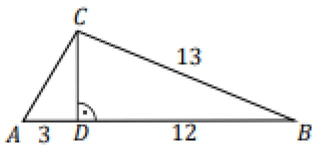
Zadanie 19. (0–1)

Pole pewnego trójkąta równobocznego jest równe $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. Obwód tego trójkąta jest równy

A. 4 **B.** 2 **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Zadanie 20. (0–1)

W trójkącie ABC bok BC ma długość 13, a wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 3$ i $|BD| = 12$ (zobacz rysunek obok). Długość boku AC jest równa



A. $\sqrt{34}$ **B.** $\frac{13}{4}$ **C.** $2\sqrt{14}$ **D.** $3\sqrt{45}$

18. D

Uzasadnienie: $\tan\alpha = \frac{|BC|}{8}$ $\quad zatem\ |BC| = \frac{16}{5}$ $\quad P = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{16}{5} = \frac{64}{5}$

19. A

Uzasadnienie: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

$Wyznaczamy\ długość\ boku\ trójkąta\ a\ i\ otrzymujemy\ a = \frac{4}{3}\ ,zatem\ Ob = 3\cdot\frac{4}{3} = 4$

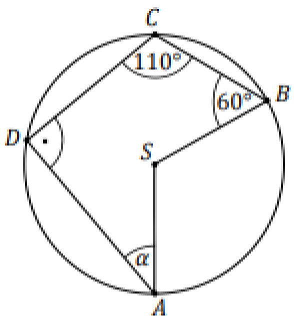
20. A

Uzasadnienie: $Obliczamy\ wysokość\ z\ Twierdzenia\ Pitagorasa. Otrzymujemy\ h = 5. Następnie\ ponownie\ korzystamy\ z\ Twierdzenia\ Pitagorasa, chcąc\ wyznaczyć\ bok\ AC.$

$$Otrzymujmy\ |AC| = \sqrt{34}$$

Zadanie 21. (0–1)

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku S. Miary kątów SBC, BCD, CDA są równe odpowiednio: $|\sphericalangle SBC| = 60°$, $|\sphericalangle BCD| = 110°$, $|\sphericalangle CDA| = 90°$ (zobacz rysunek).

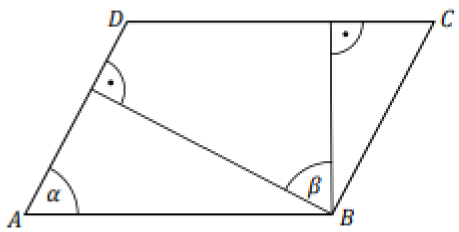


Wynika stąd, że miara α kąta DAS jest równa

A. $25°$ **B.** $30°$ **C.** $35°$ **D.** $40°$

Zadanie 22. (0–1)

W równoległoboku $ABCD$, przedstawionym na rysunku, kąt α ma miarę $70°$.



Wtedy kąt β ma miarę

A. $80°$ **B.** $70°$ **C.** $60°$ **D.** $50°$

Zadanie 23. (0–1)

W każdym n–kącie wypukłym $(n \geq 3)$ liczba przekątnych jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$. Wielokątem wypukłym, w którym liczba przekątnych jest o 25 większa od liczby boków, jest

A. siedmiokąt. **B.** dziesięciokąt. **C.** dwunastokąt. **D.** piętnastokąt.

21. D

Uzasadnienie: Kąt wpisany, który ma miarę 90 stopni musi być oparty na średnicy. Zatem odcinek AC jest średnicą. Powstały trójkąt CBS jest równoboczny (kąt 60 stopni i promienie). Zatem kąt ACD ma miarę 50 stopni (110 stopni – 60 stopni). W konsekwencji szukany kąt alfa ma miarę 40 stopni.

22. B

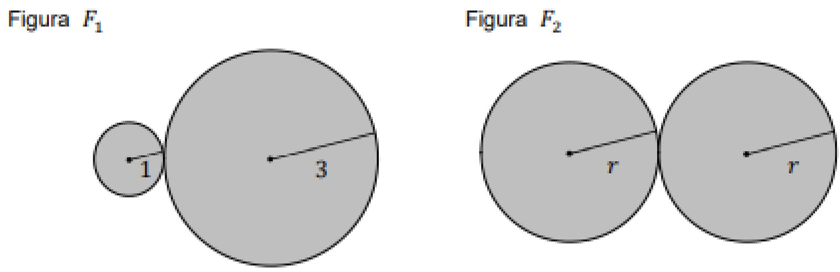
Uzasadnienie: Kąt ADC ma miarę 110 stopni. Zatem korzystając w sumy miar kątów w czworokącie, wystarczy od 360 stopni odjąć miarę kąt ADC oraz miarę dwóch kątów prostych, aby otrzymać miarę kąta beta, która wynosi 70 stopni.

23. B

Uzasadnienie: Wystarczy rozwiązać równanie $\frac{n(n-3)}{2} = n + 25$ W wyniku przekształceń powstanie funkcja kwadratowa, której delta wynosi 225. Obliczamy n_1 i n_2, jedno z nich wychodzi ujemne, drugie równe 10. Zatem wielokąt o takiej własności to dziesięciokąt.

Zadanie 24. (0–1)

Pole figury F_1 złożonej z dwóch stycznych zewnętrznie kół o promieniach 1 i 3 jest równe polu figury F_2 złożonej z dwóch stycznych zewnętrznie kół o promieniach długości r (zobacz rysunek).



Długość r promienia jest równa

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** 3

24. C

Uzasadnienie: Pole figury F_1 można obliczyć następująco: $P = \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 3^2 = 10\pi$.

A następnie porównać to pole do pola figury F_2: $\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 = 10\pi$

Wyznaczając r z równania otrzymamy $r = \sqrt{5}$

Zadanie 25. (0–1)

Punkt $A = (3, -5)$ jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$, a punkt $M = (1, 3)$ jest punktem przecięcia się przekątnych tego kwadratu. Wynika stąd, że pole kwadratu $ABCD$ jest równe

A. 68 **B.** 136 **C.** $2\sqrt{34}$ **D.** $8\sqrt{34}$

Zadanie 26. (0–1)

Z wierzchołków sześcianu $ABCDEFGH$ losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki. Prawdopodobieństwo tego, że wierzchołki te będą końcami przekątnej sześcianu $ABCDEFGH$, jest równe

A. $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{4}{7}$ **C.** $\frac{1}{14}$ **D.** $\frac{3}{7}$

Zadanie 27. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, większych od 700, w których każda cyfra należy do zbioru $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ i żadna cyfra się nie powtarza, jest

A. 108 **B.** 60 **C.** 40 **D.** 299

Zadanie 28. (0–1)

Sześciowyrazowy ciąg liczbowy $(1, 2, 2x, x + 2, 5, 6)$ jest niemalejący. Mediana wyrazów tego ciągu jest równa 4. Wynika stąd, że

A. $x = 1$ **B.** $x = \frac{3}{2}$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = \frac{8}{3}$

25. B

Uzasadnienie: Obliczamy długość odcinka AM (połowa przekątnej kwadratu). Otrzymujemy $|AM| = 2\sqrt{17}$ zatem cała przekątna AC ma długość $4\sqrt{17}$. Korzystamy ze wzoru na przekątna kwadratu $a\sqrt{2}$ i podstawiając długość przekątnej obliczamy a. Długość boku kwadratu wynosi $2\sqrt{34}$ zatem pole wynosi $P = 2\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{34} = 136$.

26. A

Uzasadnienie: Obliczamy moc zbioru Ω: $\overline{\overline{\Omega}} = C_8^2 = 28$ (dwa dowolne wierzchołki z 8).

Następnie ustalamy moc zbioru A (zdarzenie opisane w zadaniu) : $\overline{\overline{A}} = 4$ (istnieją 4 pary wierzchołków tworzących przekątne w sześciokącie, bez powtórzeń). Zatem $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

27. B

Uzasadnienie: Korzystamy z reguły mnożenia. Rozpatrujemy wszystkie liczby trzycyfrowe większe od 700, zatem jako cyfra setek może być tylko 7,8 lub 9. (3 możliwości), następnie jako cyfra dziesiątek może stać dowolna cyfra inna niż na pierwszy miejscu (5 możliwości) i na miejscu cyfry jedności może stać dowolna z pozostałych (4 możliwości). Zatem $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

28. C

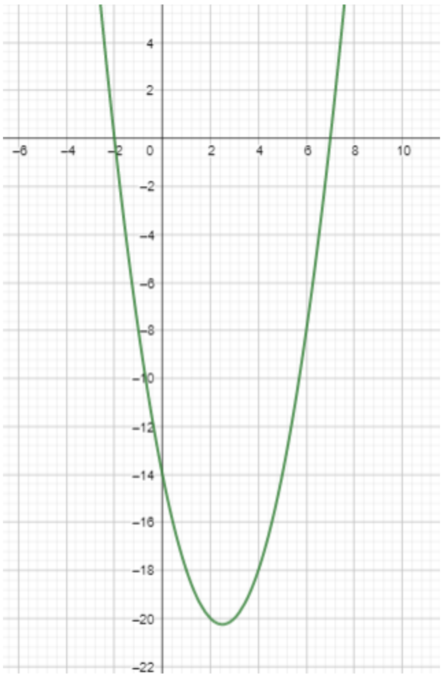
Uzasadnienie: Mediana to średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów dla ciągów o parzystej liczbie wyrazów. Zatem rozwiązujemy równanie: $\frac{2x+x+2}{2} = 4$ z którego wynika, że x=2.

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 5x \leq 14$$

Rozwiązanie:



$x^2 \; - 5x - 14 \leq 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 81$

$\sqrt{\Delta} = 9$

$x_1 = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ lub

$x_2 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

x∈ <-2,7>

Zadanie 30. (0–2)

Wykaż, że dla każdych trzech dodatnich liczb a, b i c takich, że $a < b$, spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

Rozwiązanie: zał. a>0, b>0, c>0 i a<b

Przekształcamy równoważnie założenie:

a<b /*c (mnożymy obustronnie przez liczbę c (c>0))

ac<bc /+ab (dodajemy obustronnie iloczyn ab (ab>0))

ac+ab < ab+bc

a(c+b) < ab +bc / : (c+b) (dzielimy obustronnie przez sumę c+b (c+b>0)) a< $\frac{ab+bc}{c+b}$ /:b (dzielimy obustronnie przez b (b>0))

$\frac{a}{b} < \frac{\cancel{b}(a+c)}{\cancel{b}(c+b)}$ (wyciągamy b przed nawias w liczniku i mianowniku drugiego ułamka, skracamy)

$\frac{a}{b} < \frac{c+a}{c+b}$ (otrzymujemy tezę, cnd).

Zadanie 31. (0–2)

Funkcja liniowa f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, a ponadto $f(4) - f(2) = 6$. Wyznacz wzór funkcji f.

Rozwiązanie: Wzór ogólny funkcji linowej: y= ax + b

Podstawiamy pod wzór podany punkt (0,2)

2= 0 * a + b zatem 2=b co daje **y=ax+2**

Wyznaczamy f(4)=a*4 +2 oraz f(2)=a*2 +2

Wstawiamy wyznaczone wartości pod f(4) – f(2)= 4a +2 – (2a+2) = 4a +2 -2a -2=2a

Otrzymaliśmy 2a, zatem wiedząc, że f(4) – f(2)= 6 otrzymujemy równanie 2a= 6 /:2 **a=3**

<u>Wzór szukanej funkcji to y=3x +2</u>

Zadanie 32. (0–2)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{3x+2}{3x-2} = 4 - x$$

Rozwiązanie:

$\frac{3x+2}{3x-2}$ = 4 – x /*(3x-2) Dziedzina: 3x-2≠0 3x ≠ 2 /:3 x≠ $\frac{2}{3}$ Zatem D=R-{ $\frac{2}{3}$}

3x+2 = (4 – x)(3x – 2)

3x+2 = 12x – 8 – 3x^2 +2x

3x+2 = -3x^2 +14x – 8

0 = -3x^2 + 14x - 3x – 8 – 2

0= -3x^2 + 11x -10

Δ=11^2- 4*(-3)*(-10)=121 -120 = 1

$\sqrt{\Delta}$=1

$x_1 = \frac{-11-1}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$ v $x_2 = \frac{-11+1}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ **Zatem $x \in \{1\frac{2}{3}, 2\}$**

Zadanie 33. (0–2)

Trójkąt równoboczny ABC ma pole równe $9\sqrt{3}$. Prosta równoległa do boku BC przecina boki AB i AC – odpowiednio – w punktach K i L. Trójkąty ABC i AKL są podobne, a stosunek długości boków tych trójkątów jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz długość boku trójkąta AKL.

Rozwiązanie:

$P_{ABC} = 9\sqrt{3}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ $/* 4$

$a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ $/: \sqrt{3}$

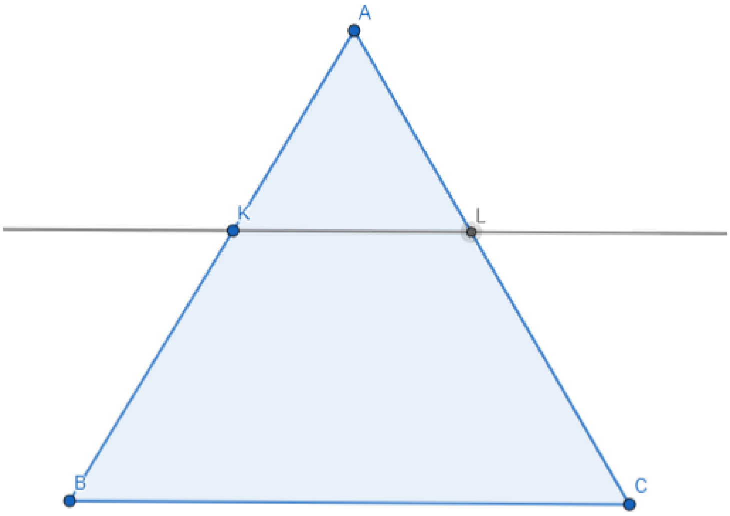
$a^2 = 36$

a = 6

$\frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|AC|}{|AL|} = \frac{|BC|}{|KL|} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{|AK|} = \frac{3}{2}$

3|AK|=12 |AK|=4



Ponieważ trójkąt AKL jest równoboczny zatem: |AL|=|KL|=|AK| = 4 .

Zadanie 34. (0–2)

Gracz rzuca dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry i oblicza sumę liczb wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.

Obliczamy moc zbioru Ω: $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$ (dwa rzuty kostką, wynik dowolny).

Wypiszmy wszystkie możliwości uzyskania sumy oczek 4 lub 5 lub 6 (zdarzenie A):

SUMA 4: (1,3), (2,2), (3,1)

SUMA 5: (1,4), (4,1), (3,2), (2,3)

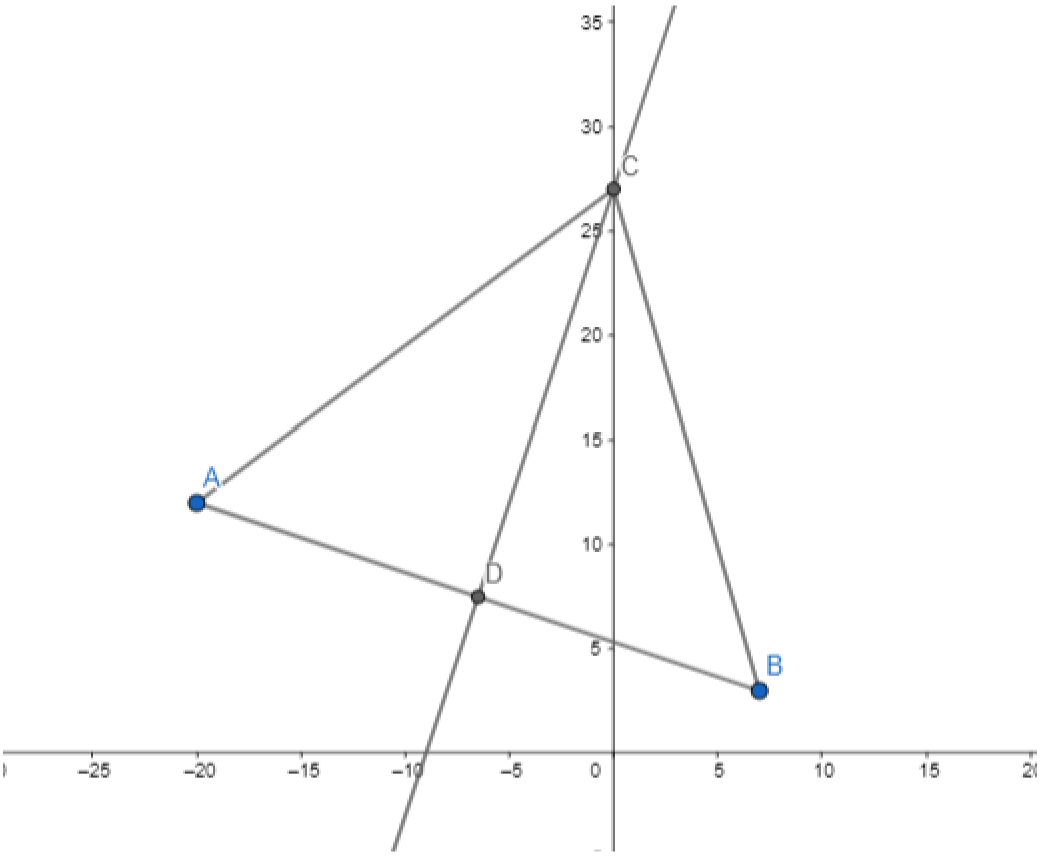
SUMA 6: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3).

Następnie ustalamy moc zbioru A (zdarzenie opisane w zadaniu) : $\overline{\overline{A}} = 3 + 4 + 5 = 12$ (suma wszystkich zdarzeń spełniających warunku zadania). Zatem $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Zadanie 35. (0–5)

Punkty $A=(-20,12)$ i $B=(7,3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Wierzchołek C leży na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie:



Wyznaczmy środek odcinka AB (spodek wysokości trójkąta równoramiennego):

$$D(x,y)=\left(\frac{-20+7}{2},\frac{12+3}{2}\right)$$

$Punkt\ D\ ma\ współrzędne$ $(-6{,}5;7{,}5)$ Następnie wyznaczamy równanie prostej AB i równanie prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez punkt D.

$$Prosta\ AB\colon \begin{cases} 12=-20a+b \\ 3=7a+b \end{cases}$$

Zatem $\begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=5\frac{1}{3} \end{cases}$ prosta AB ma wzór: $y=-\frac{1}{3}x+5\frac{1}{3}$

Wyznaczamy równanie prostej CD:

$$a=3\ (korzystając\ z\ własności\ prostych\ prostopadłych)$$

$$7{,}5=-6{,}5\cdot 3+b\ (podstawiamy\ punkt\ D)$$

Zatem b=27 a równanie prostej CD : $y = 3x + 27$

Wiedząc że punkt C leży na osi OY, wiemy że współrzędna x punkt C wynosi 0. Wystarczy policzyć współrzędną y. y=3*0+27 więc y=27

C(0,27).

Obwód trójkąta: Obliczamy ze wzoru na długość odcinka długość odcinka AB i AC.

|AB|=$\sqrt{(-20-7)^2 + (12-3)^2} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$

|AC|=|BC|=$\sqrt{(0-7)^2 + (27-3)^2} = \sqrt{625} = 25$

Ob.=50+9$\sqrt{10}$